

Simulations numériques de vortex à symétrie hélicoïdale

B. Piton^{a,b}, I. Delbende^{a,b}, M. Rossi^{a,c}

a. UPMC, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6

b. LIMSI-CNRS, UPR3251, BP133, 91403 Orsay Cedex

c. IJLRA-UPMC, UMR7190, 75232 Paris Cedex 05

Résumé :

Nous présentons un code de simulation numérique directe destiné à décrire la dynamique de vortex hélicoïdaux comme ceux qui se développent dans le sillage des hélices, des rotors d'éoliennes ou d'hélicoptères. En imposant une symétrie hélicoïdale, les équations de Navier–Stokes 3D incompressibles sont réduites à un problème 2D que nous résolvons à l'aide d'une formulation vorticité/fonction de courant généralisée. Dans ce cadre, nous simulons la dynamique visqueuse d'un ou plusieurs vortex hélicoïdaux, décrivons leurs états quasi-stationnaires ainsi que leur dynamique aux temps longs. En particulier, plusieurs types de fusion de deux vortex hélicoïdaux sont identifiés.

Abstract :

We herein present a direct numerical simulation code aimed at describing the dynamics of helical vortices such as those developing in the wake of propellers and wind turbine or helicopter rotors. By enforcing a helical symmetry, the 3D incompressible Navier–Stokes equations are reduced to a 2D problem which we solve using a generalised vorticity/streamfunction formulation. In this framework, we simulate the viscous dynamics of one or several helical vortices and describe quasi-steady states as well as long-time dynamics. In particular, several types of two-vortex merging are identified.

Mots clefs : vortex hélicoïdal, dynamique tourbillonnaire, simulation numérique directe

1 Introduction

À l'aval des machines tournantes telles que les hélices, les rotors d'éoliennes ou d'hélicoptères se développe un système de tourbillons hélicoïdaux. Ces structures se forment par l'enroulement rapide de la nappe tourbillonnaire générée en continu au bord de fuite des pales en rotation, et présentent localement une symétrie hélicoïdale se traduisant par une invariance par translation axiale combinée à une rotation autour du même axe. Dans la plupart des situations, cette propriété est perdue au niveau du sillage lointain car des instabilités peuvent s'y développer ; dans certains cas, la topologie de l'écoulement peut changer du tout au tout comme dans le cas du VRS (*vortex ring state* ou état d'anneau tourbillonnaire) pour le vol des hélicoptères [4]. Quoi qu'il en soit, il est toujours nécessaire de décrire précisément l'écoulement hélicoïdal de référence qui peut conduire à ces états.

Dans la littérature, l'étude de la dynamique des vortex hélicoïdaux [5, 7, 3, 8] est restée confinée au cadre du fluide parfait et à des modèles pour lesquels la vorticité est toujours alignée avec les lignes hélicoïdales. Nous présentons ici un code numérique original qui s'affranchit de ces restrictions, à l'exception de la symétrie hélicoïdale. En imposant cette dernière dans les équations de Navier–Stokes incompressibles, on aboutit à un problème 2D qui prend cependant en compte les effets 3D de courbure et de torsion des vortex. La résolution est de type 2D, ce qui permet d'accéder à des maillages assez fins, des nombres de Reynolds élevés, et des temps de résolution très longs.

Les équations de Navier–Stokes avec symétrie hélicoïdale et la formulation numérique sont présentées en §2. Des résultats concernant des états quasi-stationnaires composés d'un ou plusieurs vortex hélicoïdaux et la dynamique de fusion de deux vortex sont présentés en §3.

2 Résolution des équations de Navier–Stokes avec symétrie hélicoïdale. Formulation numérique

Un écoulement présente une symétrie hélicoïdale de pas $2\pi L$ le long d'un axe donné si son champ de vitesse reste inchangé par translation axiale de longueur Δz suivie d'une rotation d'angle $\Delta\theta = \Delta z/L$ autour du même axe, comme représenté figure 1a. En d'autres termes, les caractéristiques de l'écoulement restent invariantes le long des lignes hélicoïdales $\theta - z/L = \text{const}$. $L > 0$ correspond à une hélice droite, et $L < 0$ à une hélice gauche.

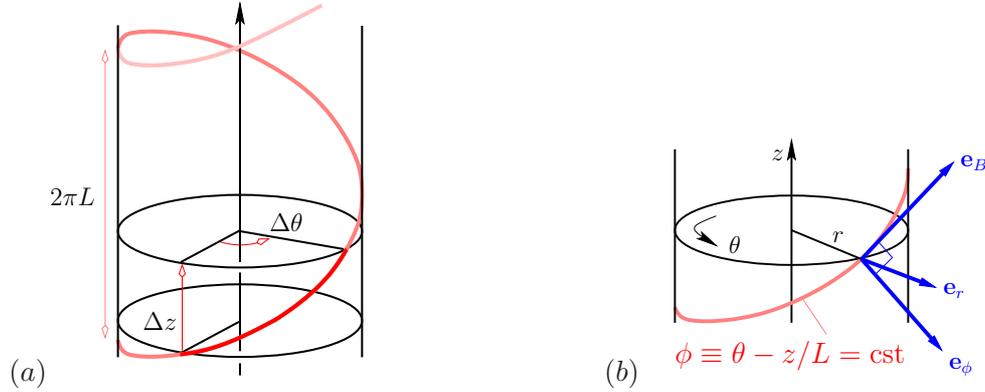


FIG. 1 – (a) Hélice droite de pas réduit L . (b) Base locale hélicoïdale.

Un champ scalaire f présente une symétrie hélicoïdale s'il ne dépend que de deux variables d'espace r et $\varphi \equiv \theta - z/L$ au lieu des trois variables r , θ et z . Pour un champ de vecteurs \mathbf{u} , la symétrie hélicoïdale signifie qu'il peut être écrit sous la forme

$$\mathbf{u} = u_r(r, \varphi, t)\mathbf{e}_r(\theta) + u_\varphi(r, \varphi, t)\mathbf{e}_\varphi(r, \theta) + u_B(r, \varphi, t)\mathbf{e}_B(r, \theta) \quad (1)$$

où la base orthogonale de Beltrami ($\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_B$), présentée figure 1b, est telle que

$$\mathbf{e}_B(r, \theta) = \alpha(r) \left[\mathbf{e}_z + \frac{r}{L}\mathbf{e}_\theta \right], \quad \mathbf{e}_\varphi(r, \theta) = \mathbf{e}_B \times \mathbf{e}_r = \alpha(r) \left[\mathbf{e}_\theta - \frac{r}{L}\mathbf{e}_z \right], \quad \text{avec } \alpha(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2/L^2}}. \quad (2)$$

Tout écoulement hélicoïdal incompressible peut être exprimé à l'aide de deux champs scalaires :

$$\mathbf{u} = u_B(r, \varphi, t) \mathbf{e}_B + \alpha(r) \nabla \psi(r, \varphi, t) \times \mathbf{e}_B \quad (3)$$

où $u_B(r, \varphi, t)$ est la composante de vitesse suivant $\mathbf{e}_B(r, \theta)$ et $\psi(r, \varphi, t)$ est une fonction de courant. Le champ de vorticité peut, quant à lui, être exprimé comme suit :

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_B(r, \varphi, t) \mathbf{e}_B + \alpha \nabla \left(\frac{u_B(r, \varphi, t)}{\alpha} \right) \times \mathbf{e}_B. \quad (4)$$

La composante ω_B de vorticité suivant \mathbf{e}_B est li e à la fonction de courant ψ , mais aussi à u_B :

$$\omega_B = -\mathbb{L}\psi + \frac{2\alpha^2}{L}u_B, \quad \text{où } \mathbb{L}(\cdot) = \frac{1}{r\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\alpha^2 \frac{\partial}{\partial r}(\cdot) \right) + \frac{1}{r^2\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}(\cdot). \quad (5)$$

La vorticité et la vitesse peuvent donc être obtenus à partir de deux scalaires seulement : $\omega_B(r, \varphi, t)$ et $u_B(r, \varphi, t)$. La fonction de courant $\psi(r, \varphi, t)$ est esclave de ces variables par la relation (5).

Pour décrire l'évolution de l'écoulement, il faut donc obtenir deux équations dynamiques pour les variables $\omega_B(r, \varphi, t)$ et $u_B(r, \varphi, t)$. Cette formulation est une généralisation de la méthode standard ψ - ω utilis e dans le cadre 2D : les équations de Navier–Stokes 3D pour un écoulement à symétrie hélicoïdale peuvent être réduites aux deux équations dynamiques coupl es pour $u_B(r, \varphi, t)$ et $\omega_B(r, \varphi, t)$

$$\partial_t u_B + \mathbf{e}_B \cdot [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}] = \nu \left[\mathbb{L} \left(\frac{u_B}{\alpha} \right) - \frac{2\alpha^2}{L} \omega_B \right], \quad (6)$$

$$\partial_t \omega_B + \mathbf{e}_B \cdot \nabla \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}] = -\nu \mathbf{e}_B \cdot \nabla \times [\nabla \times \boldsymbol{\omega}] = \nu \left[\mathbb{L} \left(\frac{\omega_B}{\alpha} \right) - \left(\frac{2\alpha^2}{L} \right)^2 \omega_B \frac{2\alpha^2}{L} \mathbb{L} \left(\frac{u_B}{\alpha} \right) \right]. \quad (7)$$

La variable $\varphi = \theta - z/L$ étant 2π -periodique, les différents champs peuvent être exprimés en séries de Fourier selon cette variable. On introduit donc les modes $u_B^{(m)}(r, t)$, $\omega_B^{(m)}(r, t)$ et on réécrit les équations (6) et (7) pour chaque mode de Fourier m (entier). À partir des modes $u_B^{(m)}(r, t)$, $\omega_B^{(m)}(r, t)$ pour $m \neq 0$, on obtient $\psi^{(m)}(r, t)$ pour $m \neq 0$ à l'aide de l'équation (5) écrite pour un mode m :

$$\mathbb{L}^{(m)} \psi^{(m)} = -\omega_B^{(m)} + \frac{2\alpha^2}{L} u_B^{(m)}, \quad \text{où } \mathbb{L}^{(m)}(\cdot) = \frac{1}{r\alpha} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\alpha^2 \frac{\partial}{\partial r}(\cdot) \right) - \frac{m^2}{r^2\alpha}, \quad (8)$$

ainsi que des conditions aux limites pour $\psi^{(m)}(r, t)$. L'évolution temporelle du mode $u_B^{(m)}(r, t)$ est régie par :

$$\partial_t u_B^{(m)} + NL_u^{(m)} = \nu \left[\mathbb{L}^{(m)} \left(\frac{u_B^{(m)}}{\alpha} \right) - \frac{2\alpha^2}{L} \omega_B^{(m)} \right], \quad (9)$$

où la contribution $NL_u^{(m)}$ est la transformée de Fourier des termes non linéaires de l'équation (6) préalablement évalués dans l'espace physique. L'évolution temporelle des modes $\omega_B^{(m)}(r, t)$ avec $m \neq 0$ est traitée de manière similaire. Celle du mode $m = 0$ est traitée séparément.

Des conditions aux limites doivent également être imposées sur $\omega_B^{(m)}$ et $u_B^{(m)}$: il s'agit de conditions de régularité en $r = 0$ et de conditions sur la frontière extérieure située en $r = R_{\text{ext}}$:

$$\omega_B^{(m)}(R_{\text{ext}}) = 0, \quad u_B^{(m)}(R_{\text{ext}}) = 0 \quad \text{pour } m \neq 0, \quad u_B^{(0)}(R_{\text{ext}}) = \alpha(R_{\text{ext}}) \left(U_z^\infty + \frac{\Gamma}{2\pi L} \right). \quad (10)$$

Le code numérique présenté ici est adapté d'un code pseudo-spectral purement 2D écrit par O. Daube [1]. L'avance temporelle des modes se fait à l'aide d'une discrétisation temporelle décentrée du second ordre. Le traitement des termes visqueux est implicite, celui des termes non linéaires est explicite grâce à une extrapolation de type Adams–Bashforth du second ordre. La discrétisation spatiale se fait à l'aide de maillages décalés de pas $\delta r = R_{\text{ext}}/(N_r - 1)$ dans la direction radiale : aux points $r_i = (i - 1)\delta r$ ($i = 1, \dots, N_r$) sont définies les grandeurs u_B , ω_B , ψ , u_r et ω_r , alors que les points $r_i^+ = r_i + \delta r/2$ ($i = 1, \dots, N_r$) servent à définir u_φ et ω_φ . La discrétisation radiale de l'opérateur $\mathbb{L}^{(m)}$ ainsi que des termes visqueux se fait à l'aide d'un schéma centré du second ordre. Une discrétisation en φ est utilisée pour le calcul des termes non linéaires et pour la visualisation : on utilise alors une série de N_θ points définis par $\varphi_j = j \delta \varphi$ ($j = 0, \dots, N_\theta - 1$) où $\delta \varphi = 2\pi/N_\theta$. Tous les détails peuvent être trouvés dans la Ref. [2].

3 Résultats

On simule ici l'évolution d'un unique vortex hélicoïdal de pas assez court $L = 0.5$. Le profil initial est donné par :

$$\omega_B = \frac{\Gamma_0}{\pi a_0^2} \exp[-(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2/a_0^2] \quad \text{et} \quad \frac{u_B}{\alpha} = \frac{\Gamma_0}{2\pi L}, \quad (11)$$

où $\Gamma_0 = \pi$, $\mathbf{r}_0 = (1, 0)$, $a_0 = 0.1$. Le nombre de Reynolds est choisi comme $Re = \Gamma_0/\nu = 1000$. La simulation numérique est effectuée sur un domaine de rayon $R_{\text{ext}} = 2$, avec un maillage de 512×256 points. L'évolution temporelle de la composante hélicoïdale de vorticité ω_B est représentée figure 2. Pour des temps très courts, de petits filaments hélicoïdaux se forment ($t = 0.08, 0.012$) et disparaissent rapidement ($t = 0.2, 0.4$). Le vortex atteint ainsi un état quasi-stationnaire pour $t > 0.4$, et n'évolue plus que sur une échelle de temps lente impos e par la diffusion visqueuse et proportionnelle au nombre de Reynolds.

Mesurer la vitesse angulaire $\omega(t)$ obtenue par DNS et la comparer avec sa valeur théorique calcul e par la théorie de *cutoff* est un des tests de validation du code. Les valeurs théoriques sont en fait ici

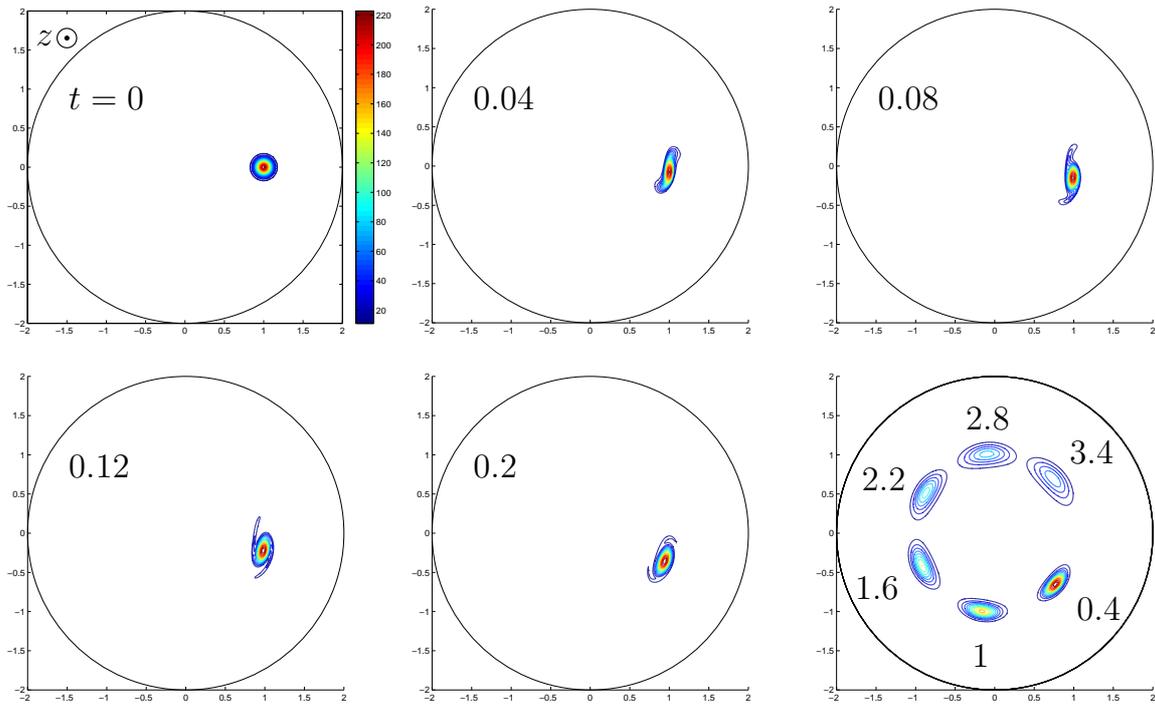


FIG. 2 – Convergence d’un vortex hélicoïdal unique vers un état quasi-stationnaire : évolution temporelle de ω_B dans un plan perpendiculaire à l’axe, pour $Re = 1000$. Le pas de l’hélice est de $L = 0.5$ et les paramètres à $t = 0$ sont $\Gamma_0 = \pi$, $r_0 = \|\mathbf{r}_0\| = 1$, $a_0 = 0.1$

semi-analytiques car leur calcul fait intervenir des grandeurs relatives au cœur tourbillonnaire — sa taille $a(t)$, sa distance à l’axe $r_{\max}(t)$, sa circulation $\Gamma(t)$ — qui dépendent du temps et sont données par la DNS. La comparaison présentée figure 3 est satisfaisante une fois que les filaments ont été détruits et que le vortex a atteint son état quasi-stationnaire. La figure 4 montre en 3D un état quasi-stationnaire composé de deux vortex hélicoïdaux identiques mais décalés d’un demi-tour l’un par rapport à l’autre. Il est à noter que les cœurs tourbillonnaires, qui apparaissent très déformés dans le plan inférieur perpendiculaire à z , sont en fait quasi-circulaires. La stabilité de ces états ne peut être déterminée dans le présent cadre : le code numérique présenté ici permet éventuellement de générer des écoulements de base instables, préalables à de futures études numériques d’instabilité sur des codes 3D.

Aux temps longs, on sait dans le cas purement bi-dimensionnel ($L = \infty$), que deux vortex identiques tournent l’un autour de l’autre pendant un temps proportionnel au nombre de Reynolds [6], que leur distance décroît brutalement et que, après quelques oscillations rapides, elle s’annule (ici à $t = 532$), ce qui indique que les vortex ont fusionné. La distance $r_{\max}(t)$ d’un maximum de vorticité à l’axe z lors de ce processus est pr  sent  e figure 5 (courbe pour $L = \infty$).

Des simulations ont été effectu  es au même nombre de Reynolds $Re = 10000$ mais avec des vortex hélicoïdaux (L fini). La figure 6 présente l’évolution temporelle de la composante hélicoïdale ω_B de la vorticité pour les valeurs $L = \infty, 3, 1.3, 0.8$. Le graphe de la figure 5 montre que diminuer L ralentit progressivement le processus de fusion. Par exemple, pour $L = 2$, le temps de fusion devient $t = 1404$ (en dehors du graphe). La figure 5 révèle un autre phénomène : quand on atteint la valeur $L = 0.8$, la courbe $r_{\max}(t)$ change d’aspect et devient fortement perturb  e passé $t = 300$. En effet, en plus de la symétrie hélicoïdale, la condition initiale à deux vortex est invariante par la transformation $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$. Pour les plus grandes valeurs simul  es du pas d’hélice ($L > 1.2$), cette symétrie supplémentaire est pr  serv  e tout au long de l’évolution. En revanche, la dynamique pour $L = 0.8$, repr  sent  e en bas de la figure 6 montre qu’elle est bris  e à une certaine date : un des vortex hélicoïdaux vient se placer à l’intérieur de l’autre (voir $t = 350$) et leur interaction devient ensuite complexe. Lors de cette brisure

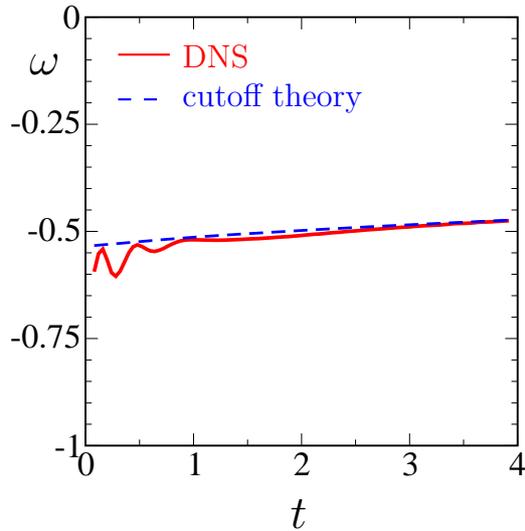


FIG. 3 – Vitesse angulaire $\omega(t)$ du vortex hélicoïdal lors de la simulation de la figure 2. Comparaison entre DNS et théorie semi-analytique de type *cutoff*.

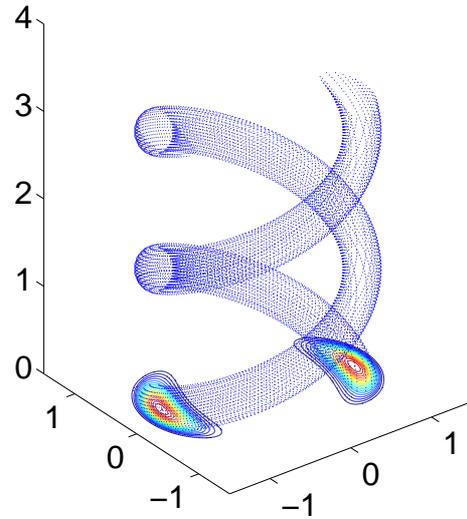


FIG. 4 – Etat quasi-stationnaire obtenu pour deux vortex et représenté en 3D. $L = 0.5$.

de symétrie, la périodicité azimutale passe de π à la valeur 2π , et, par conséquent, la périodicité axiale passe de πL à $2\pi L$. Le phénomène présente des points communs avec l'instabilité sub-harmonique d'appariement d'une rangée de vortex rectilignes ou d'anneaux tourbillonnaires. La fusion à faible L implique des spires adjacentes et est très similaire à la fusion de deux anneaux tourbillonnaires [9], alors qu'à plus grand $L > 1.2$, les deux vortex entrent en contact au niveau de l'axe z . Notons finalement qu'à la valeur intermédiaire $L = 1.3$, la fusion se fait à $t = 5079$, sans oscillations de $r_{\max}(t)$ et prend la forme d'une couronne de vortécité hélicoïdale (voir figure 6, $L = 1.3$, $t = 2610$ et 4400).

Références

- [1] Daube, O. 1992 Resolution of the 2D Navier–Stokes equations in velocity/vorticity form by means of an influence matrix technique. *J. Comp. Phys.* **103**, 402–414.
- [2] Delbende, I., Rossi, M., Daube, O. 2011 DNS of flows with helical symmetry. *Submitted to Theor. Comput. Fluid Dynam.*
- [3] Fukumoto, Y., Okulov, V. L. 2005 The velocity field induced by a helical vortex tube. *Phys. Fluids* **17**, 107101.
- [4] Green, B. G., Gillies, E. A., Brown, R. E. 2005 The flow field around a rotor in axial descent. *J. Fluid Mech.* **534**, 237–261.
- [5] Hardin, J. C. 1982 The velocity field induced by a helical vortex filament. *Phys. Fluids* **25**(11), 1949–1952.
- [6] Josserand, C., Rossi, M. 2007 The merging of two co-rotating vortices : a numerical study. *Eur. J. Mech. B/Fluid.* **26**, 779–794.
- [7] Kuibin, P. A., Okulov, V. L. 1998 Self-induced motion and asymptotic expansion of the velocity field in the vicinity of a helical vortex filament. *Phys. Fluids* **10**, 607–614.
- [8] Lucas, D., Dritschel, D. G. 2009 A family of helically symmetric vortex equilibria. *J. Fluid Mech.* **634**, 245–268.
- [9] Riley, N., Stevens, D. P. 1992 A note on leapfrogging vortex rings. *Fluid Dyn. Res.* **11**, 235–244.

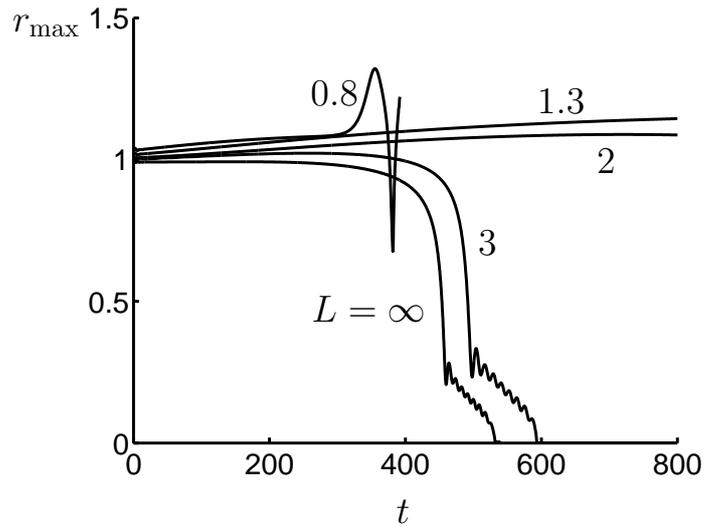


FIG. 5 – Fusion de deux vortex à $Re = 10000$ pour différentes valeurs de L : évolution temporelle de la distance r_{\max} d'un des vortex à l'axe z . Vortex initiaux : $\Gamma_0 = 1$, $r_0 = 1$, $a_0 = 0.2$.

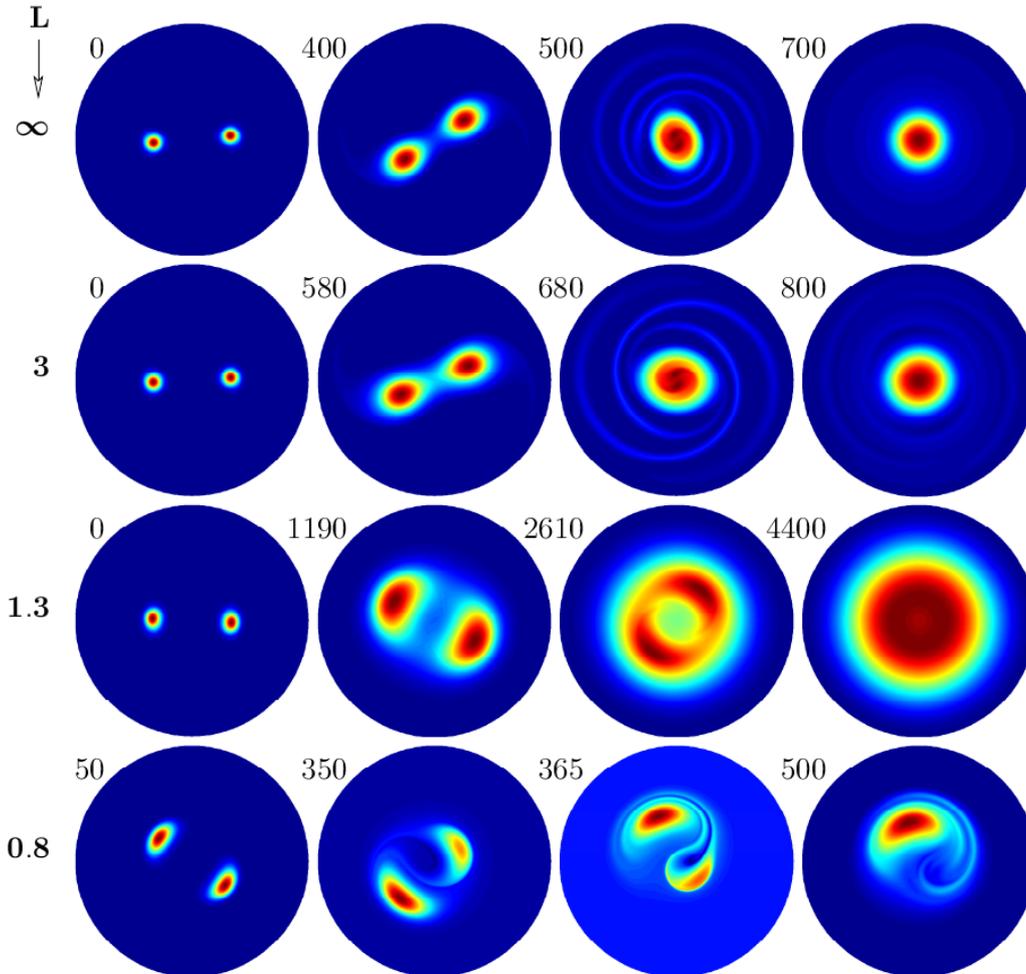


FIG. 6 – Composante hélicoïdale de vorticité ω_B pendant la fusion de deux vortex de pas réduit L à $Re = 10000$, aux dates indiquées au-dessus des vignettes. Les vortex initiaux sont tels que $\Gamma_0 = 1$, $r_0 = 1$, $a_0 = 0.2$.