

# Saute-mouton de vortex hélicoïdaux : une approche de type système dynamique

I. DELBENDE<sup>a</sup>, M. ROSSI<sup>b</sup>, C. SELÇUK<sup>c</sup>

a. Sorbonne Université, LIMSIS-CNRS, delbende@limsi.fr

b. CNRS, *∂*Alembert-Sorbonne Université, maurice.rossi@sorbonne-universite.fr

c. LIMSIS-CNRS, cselcuk@math.ubc.ca

## Résumé :

*Cette étude a trait à l'interaction non linéaire de deux vortex hélicoïdaux. Un premier modèle s'appuie sur l'analogie de ce système avec deux allées périodiques de points vortex en régime non linéaire. Ceci permet d'interpréter la dynamique des vortex hélicoïdaux (saute-mouton ou dépassement de vortex) en terme de système hamiltonien présentant des trajectoires bornées ou non bornées. Les effets de courbure et de torsion peuvent également être pris en compte dans un second système dynamique fondé sur des filaments hélicoïdaux tridimensionnels non visqueux. On comprend ainsi certains phénomènes observés en simulation numérique directe des équations de Navier–Stokes.*

## Abstract :

*This study concerns the nonlinear interaction of two helical vortices. The simplest model is based on the analogy between the above system and two periodic alleys of point vortices, extended here to the nonlinear regime. In this framework, it is possible to describe the dynamics of the helical vortices (leap-frog versus vortex overtaking) in terms of a Hamiltonian system with bounded or unbounded trajectories. Curvature and torsion effects can also be taken into account when considering a dynamical system based on three-dimensional inviscid helical filaments. This approach proves to be useful for the understanding of phenomena observed in the direct numerical simulations of the Navier–Stokes equations.*

**Mots clefs : vortex, vortex hélicoïdaux, système dynamique, système hamiltonien, instabilités, dynamique non linéaire.**

## 1 Introduction

Les éoliennes et les hélices propulsives sont caractérisées par un sillage constitué de vortex hélicoïdaux de bout de pale, qui matérialisent le cisaillement de vitesse axiale et de vitesse orthoradiale entre l'écoulement qui traverse le rotor et l'écoulement externe. Leurs propriétés d'instabilité sont d'importance pratique, dans les parcs éoliens notamment, car elles sont liées aux capacités de régénération du déficit de vitesse à l'aval de chaque aérogénérateur. Ces tourbillons ont une structure complexe et sont sujets à différents types d'instabilités, dominées en général par des modes de déplacement de grande longueur d'onde dont la stabilité linéaire est bien documentée dans la littérature [1, 2, 3]. Le but de cette étude est

d'étendre ces analyses linéaires au domaine non linéaire et de prédire la dynamique d'interaction de ces tourbillons dès lors qu'ils s'écartent de l'arrangement initial régulier imposé par la rotation du rotor.

Dans ce travail, on considère des écoulements à symétrie hélicoïdale i.e. invariants par vissage, une transformation qui associe à une translation de distance  $\Delta z$  le long d'un axe  $Oz$ , la rotation d'angle  $\Delta\theta = \Delta z/L$  de même axe ( $\ell = 2\pi L$  est le pas hélicoïdal supposé fixé). Les composantes polaires des champs vectoriels et les grandeurs scalaires telles que la pression sont invariantes le long de lignes d'équations  $r = \text{cte}$  et  $\varphi \equiv \theta - z/L = \text{cte}$ . Par ailleurs, nous nous limitons au cas de deux tourbillons hélicoïdaux caractéristiques du sillage des rotors bi-pales. L'écoulement de base est donc constitué de deux vortex hélicoïdaux identiques en quasi-équilibre, séparés le long de l'axe d'une distance  $\ell/2 = \pi L$  (figure 1 a), de rayon hélicoïdal  $R_0$ , de taille de cœur  $a_0$  et de circulation  $\Gamma$ . Dans la suite, on étudie les perturbations à cet état de base (figure 1 b) et leur évolution non linéaire.

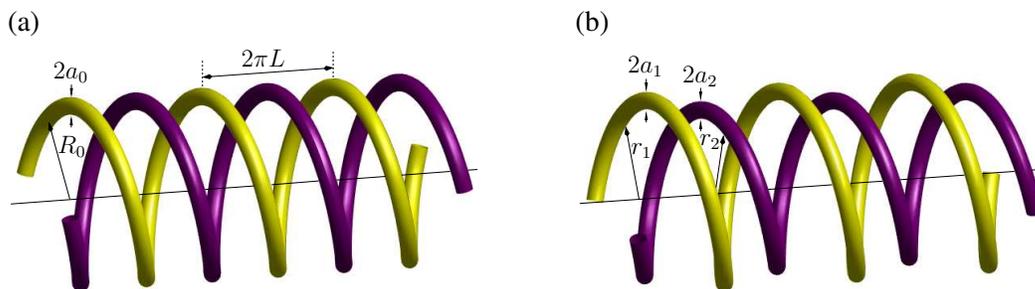


FIGURE 1 – Géométrie d'un écoulement à symétrie hélicoïdale constitué de deux vortex. (a) État de base. (b) État perturbé.

Trois approches sont utilisées : la première est un modèle non visqueux bidimensionnel de deux allées périodiques de tourbillons, valide quand  $L \ll R_0$ . On l'obtient en coupant le système tourbillonnaire par un plan méridien et en remplaçant les vortex de la coupe par des vortex ponctuels. On néglige ainsi la courbure, la torsion et l'extension des cœurs tourbillonnaires. Le système dynamique obtenu est étudié dans la partie 2. La deuxième approche utilise deux tourbillons hélicoïdaux filamenteux non visqueux. Elle est d'une portée plus générale : elle prend en compte les effets de courbure et de torsion et modélise la structure du cœur tourbillonnaire. On obtient également un système dynamique de basse dimension étudié dans la partie 3. Les prédictions faites à l'aide de chacun de ces modèles sont comparées à des résultats obtenus par une troisième approche, la simulation numérique directe en symétrie hélicoïdale, qui, elle, prend en compte la structure du cœur tourbillonnaire et la diffusion visqueuse. Des conclusions et perspectives sont données dans la partie 4.

## 2 Faibles pas hélicoïdaux : modèle d'allée de points vortex

Quand le pas hélicoïdal  $\ell$  est faible, la dynamique des vortex est dominée par les inductions mutuelles de spire à spire. La courbure joue alors un rôle secondaire et peut être négligée en première approximation. Ceci revient à modéliser chaque vortex hélicoïdal par une allée périodique de points vortex distants de  $\ell$ . La dynamique est alors régie par la loi de Biot–Savart bi-dimensionnelle en milieu périodique. Cette approche a déjà été utilisée dans la littérature et a permis d'interpréter, dans le cadre linéaire, les instabilités de grande longueur d'onde comme une manifestation de l'instabilité d'appariement des vortex bidimensionnels [5, 6]. L'idée est d'étendre cette approche au régime non linéaire [7].

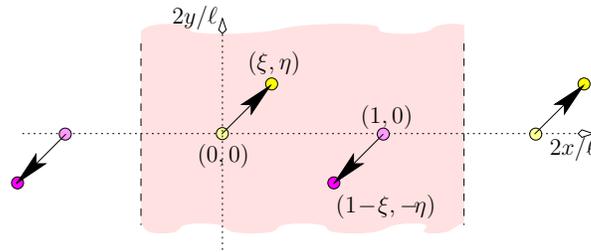


FIGURE 2 – Perturbation de la double allée périodique de points vortex.

## 2.1 Modèle et système dynamique

Chaque vortex hélicoïdal  $i$  est modélisé dans un plan  $(x, y)$  par une allée périodique de vortex ponctuels situés en  $(x_i(t) + k\ell, y_i(t))$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Le système dynamique qui régit l'évolution de la position de ces deux allées est hamiltonien, de dimension 4. Toutefois la prise en compte de la conservation des deux composantes de l'impulsion  $\Gamma(y_1 + y_2)$  et  $\Gamma(x_1 + x_2)$  permet de réduire le nombre de degrés de liberté à 2. En effet, si l'on perturbe les allées de leur position de base  $(x_1, y_1) = (0, 0)$  et  $(x_2, y_2) = (\ell/2, 0)$ , ces conservations imposent  $x_2 = \ell/2 - x_1$  and  $y_2 = -y_1$ . En introduisant les variables adimensionnées  $(\xi, \eta) \equiv 2(x_1, y_1)/\ell$  (voir figure 2), on arrive au système dynamique (le temps est adimensionné par  $\Gamma/\ell$ ) :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\cosh(2\pi\eta) + \cos(2\pi\xi)} \begin{pmatrix} \sinh(2\pi\eta) \\ \sin(2\pi\xi) \end{pmatrix} \quad (1)$$

associé au Hamiltonien adimensionné

$$H = -\frac{1}{4\pi} \log \{ \cosh(2\pi\eta) + \cos(2\pi\xi) \} , \quad (2)$$

qui est une quantité conservée au cours du temps.

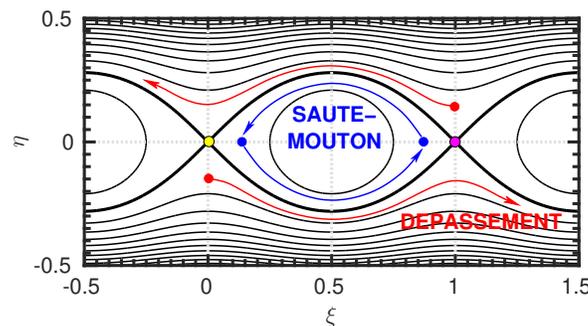


FIGURE 3 – Lignes  $H = cte$ , donnant accès aux trajectoires des vortex. Quand le vortex 1 est en  $(\xi, \eta)$ , le vortex 2 est en  $(\xi', \eta') = (1 - \xi, -\eta)$ . Dynamiques typiques de dépassement (rouge) ou de saute-mouton (bleu).

Les trajectoires des vortex suivent les lignes  $H = cte$  dans le plan  $(\xi, \eta)$ . Au vu de la figure 3, on peut distinguer deux types de dynamiques, en fonction des conditions initiales choisies. Si les vortex sont perturbés dans la direction  $\xi$  (points bleus), on les déplace axialement. Dans ce cas, les trajectoires sont bornées en  $\xi$  et les allées 1 et 2 échangent périodiquement leurs positions : c'est le phénomène de saute-mouton, illustré sur la figure 4a. En revanche, si les vortex sont perturbés dans la direction  $\eta$  (points rouges), on les déplace radialement et les trajectoires ne sont alors plus limitées en  $\xi$  : les deux allées

ont un mouvement relatif mais restent de part et d'autre de l'axe, sans échange. Ce phénomène, que nous nommons *dépassement* car il n'y a ici plus l'échange périodique des rôles entre les deux allées, est illustré figure 4b.

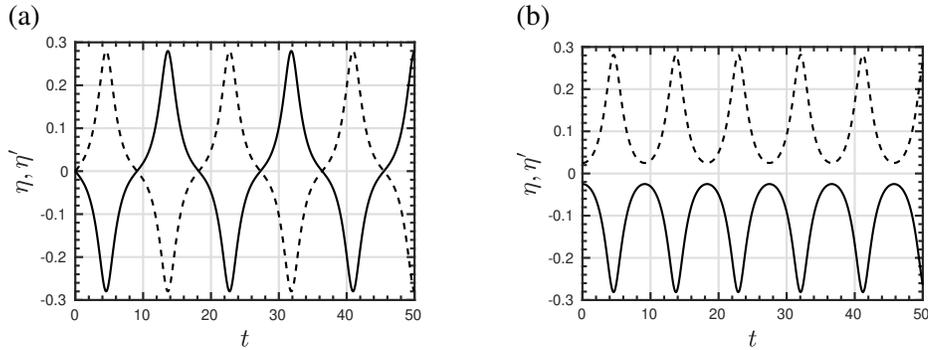


FIGURE 4 – Évolution temporelle des distances à l'axe  $\eta$  et  $\eta'$  quand les vortex sont initialement déplacés d'une petite distance (a) suivant l'axe, (b) perpendiculairement à l'axe.

Il est à noter que ce modèle peut être étendu à un modèle axisymétrique d'anneaux tourbillonnaires coaxiaux, qui prend en compte la courbure des vortex hélicoïdaux mais pas leur torsion, et ceci conduit à des résultats similaires.

## 2.2 Pertinence pour le cas visqueux

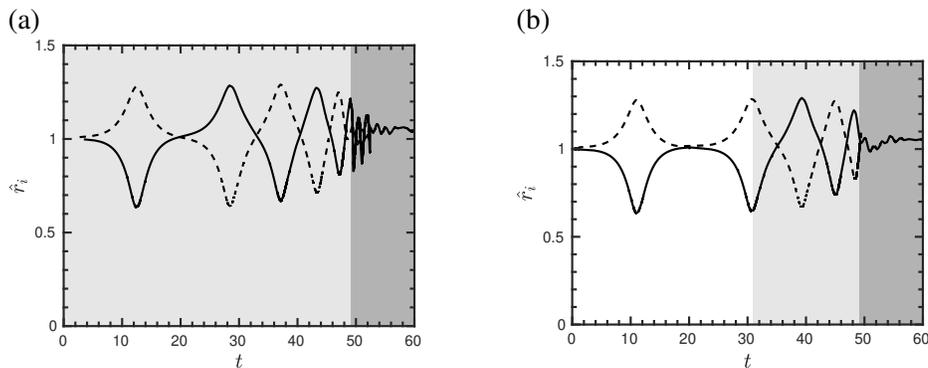


FIGURE 5 – Évolution temporelle des distances à l'axe  $\hat{r}_i \equiv r_i/R_0$  des deux vortex hélicoïdaux de pas réduit  $L/R_0 = 0.4$ , de taille de cœur initiale  $a_0/R_0 = 0.06$ , obtenue par DNS à  $Re = 10000$ . Les vortex sont initialement déplacés d'une petite distance (a) suivant l'axe, (b) radialement. Fond blanc : dépassement ; fond gris clair : saute-mouton ; fond sombre : fusion.

Le modèle précédent est pertinent pour décrire la dynamique des vortex hélicoïdaux à faible pas hélicoïdal  $L \ll R_0$ , pour lesquels ces deux types de régimes sont également observés. La figure 5 montre l'évolution temporelle de la distance à l'axe des deux tourbillons hélicoïdaux obtenue à l'aide de simulations numériques directes (DNS) pour deux types de perturbations initiales (axiale et radiale). La première phase de l'évolution est très similaire à ce que donne le modèle non visqueux précédent. Au cours du temps, on observe que la phase de dépassement (zone sur fond blanc de la figure 5b) laisse la place à une phase de saute-mouton (fond gris clair). Ceci est dû aux modifications lentes du système liées la diffusion visqueuse, en particulier la croissance de la taille de cœur. Dans les deux cas, les simulations se terminent par la fusion des deux vortex (fond sombre), un processus également d'origine visqueuse [8].

### 3 Le sillage modélisé par une paire de filaments hélicoïdaux

On généralise l'approche de la partie 2 à des pas hélicoïdaux quelconques. Les deux tourbillons sont cette fois modélisés par deux filaments vortex hélicoïdaux  $i = 1$  ou  $2$ , de taille de cœur  $a_i$ , repérés par leurs coordonnées polaires  $(r_i, \varphi_i)$  dans le plan  $z = 0$  perpendiculaire à l'axe de la symétrie hélicoïdale.

#### 3.1 Modèle et méthodologie

On obtient le système qui régit la dynamique en écrivant la loi de Biot–Savart tridimensionnelle pour les filaments vortex dans le plan  $z = 0$ . On accède à la vitesse auto-induite du tourbillon  $i$  par la méthode de cut-off [4] : elle consiste à couper de part et d'autre du plan  $z = 0$  une portion de filament de longueur proportionnelle<sup>1</sup> à la taille de cœur  $a_i$  afin de désingulariser l'intégrale de Biot–Savart. On obtient un système dynamique de dimension 4 qui régit l'évolution temporelle des positions  $(r_i, \varphi_i)$ . En utilisant la conservation de l'impulsion axiale  $\Gamma(r_1^2 + r_2^2)$ , on peut réduire ce système à un système de dimension 3 régissant l'évolution de  $r_1(t)$ ,  $\varphi_1(t)$  et  $\varphi_2(t)$ . Sous l'effet de l'étirement, la taille de cœur  $a_i$  varie, mais demeure esclave du rayon  $r_i$  de l'hélice et de sa valeur  $a_0$  pour l'état de base :

$$a_i(t) = a_0 \left( \frac{r_i(t)^2 + L^2}{R_0^2 + L^2} \right)^{-\frac{1}{4}}. \quad (3)$$

On étudie le mouvement relatif des vortex en écrivant deux équations dynamiques pour les variables  $r_1$  et  $\varphi_1 - \varphi_2$ . On déduit la valeur de  $r_2 = (2R_0^2 - r_1^2)^{1/2}$ , ainsi que celles de  $a_1$  et  $a_2$  à l'aide de (3).

Dans la suite, on adimensionne les variables en utilisant le rayon  $R_0$  et la circulation  $\Gamma$  comme grandeurs de référence, ce qui conduit aux paramètres adimensionnels suivants : pas réduit  $\hat{L} = L/R_0$ , taille de cœur  $\hat{a} = a/R_0$  et, pour la simulation numérique directe, nombre de Reynolds  $Re = \Gamma/\nu$  où  $\nu$  désigne la viscosité cinématique.

#### 3.2 Portraits de phase en fonction du pas hélicoïdal

Pour représenter les portraits de phase qui décrivent la dynamique des tourbillons filamenteux hélicoïdaux, on ne dispose pas, contrairement au cas bidimensionnel, d'expression analytique simple du Hamiltonien. On peut néanmoins construire ces portraits en résolvant les équations du système dynamique à partir de plusieurs conditions initiales différentes, par lesquelles les tourbillons sont initialement écartés de leur position d'équilibre.

La figure 6 présente de tels portraits en vue méridienne dans le plan  $[\hat{r}, \frac{1}{2}\hat{L}(\varphi_1 - \varphi_2)]$  où  $\frac{1}{2}\hat{L}(\varphi_1 - \varphi_2)$  représente la position axiale relative des deux vortex dans un plan méridien, divisée par deux. Les portraits obtenus dépendent fortement du pas hélicoïdal  $\hat{L}$ , et, dans une moindre mesure, de la taille de cœur  $\hat{a}$  (non montré ici). Pour les faibles valeurs du pas (figure 6a), on retrouve de grandes similitudes avec le portrait obtenu dans le cadre bi-dimensionnel (partie 2) : l'évolution saute-mouton ou dépassement se fait suivant que la perturbation initiale est axiale ou radiale. Lorsque le pas  $\hat{L}$  prend des valeurs proches de 1 (figure 6b), les trajectoires relatives au phénomène de dépassement disparaissent au profit de trajectoires localisées en  $\varphi_1 - \varphi_2$  dans un intervalle limité autour de la position d'équilibre (voir les trajectoires rouges de la figure 6b) : les tourbillons peuvent avoir des excursions radiales importantes, mais restent opposés l'un de l'autre par rapport à l'axe de symétrie : c'est un régime que nous nommons *flottement*

1. Le coefficient de proportionnalité, pour les tourbillons gaussiens utilisés ici, est  $\delta \approx 0.8735$ .

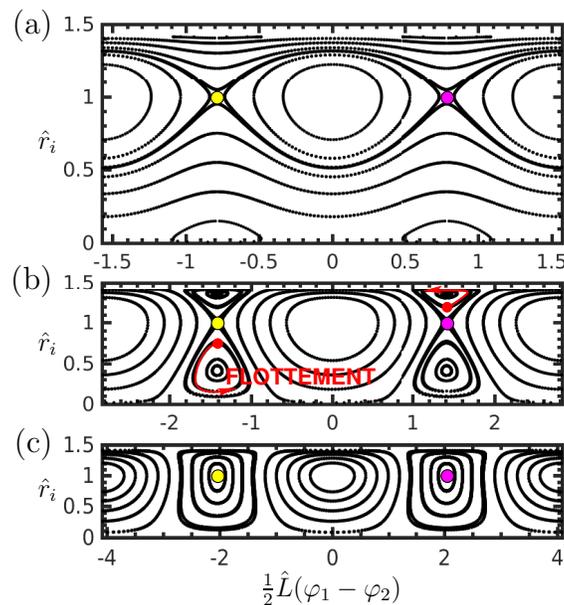


FIGURE 6 – Portrait de phase pour deux vortex hélicoïdaux filamentaires de taille de cœur  $\hat{a}_0 = 0.06$ , de pas hélicoïdal réduit (a)  $\hat{L} = 0.5$ , (b)  $\hat{L} = 0.9$  et (c)  $\hat{L} = 1.3$ .

car la position relative des deux tourbillons fluctue légèrement (et périodiquement) au cours du temps. Enfin, aux valeurs les plus importantes du pas hélicoïdal, l'état d'équilibre devient stable (figure 6c).

### 3.3 Amplitude du mouvement et comparaison avec la simulation numérique directe

On déduit des portraits de phase de la figure 6, les amplitudes des trajectoires non linéaires des tourbillons quand ils quittent leur position d'équilibre : ce sont les excursions radiales maximales observées en suivant l'orbite hétérocline ou homocline issue de la position d'équilibre. Ces amplitudes sont représentées sur la figure 7. L'excursion radiale des tourbillons est initialement proportionnelle à  $\hat{L}$ , en accord avec l'étude bidimensionnelle. Les excursions des tourbillons intérieur ( $\hat{A}^- < 0$ ) et extérieur ( $\hat{A}^+ > 0$ ) se disymétrisent ensuite et saturent pour  $\hat{L} \approx 0.85$ , point où la dynamique de dépassement est remplacée par le flottement. Au-delà, les excursions diminuent jusqu'à atteindre zéro pour  $\hat{L} \approx 1.2$ , valeur à laquelle le système se stabilise.

Sur la figure 7, les symboles représentent les amplitudes mesurées à partir des simulations numériques directes à  $Re = 5000$  pour différents pas hélicoïdaux. Un bon accord est obtenu, sauf au voisinage de la restabilisation où les temps caractéristiques de la dynamique non visqueuse deviennent très longs et comparables au temps caractéristique visqueux, ce qui explique l'écart observé.

## 4 Conclusions et perspectives

Dans cette étude, nous modélisons une paire de tourbillons hélicoïdaux en utilisant deux approches non visqueuses. La première, bidimensionnelle, utilise deux allées périodiques de points vortex et reste valable à faible pas hélicoïdal. Elle révèle les conditions dans lesquelles le système présente une dynamique de saute-mouton ou de dépassements successifs. La seconde, tridimensionnelle, utilise deux vortex filaments hélicoïdaux. De portée plus générale, elle est analytiquement beaucoup plus complexe.

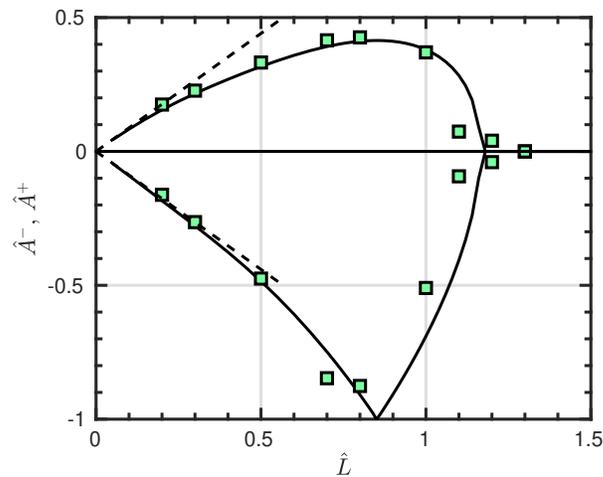


FIGURE 7 – Amplitudes radiales  $\hat{A}^-$  et  $\hat{A}^+$  de la dynamique de deux vortex hélicoïdaux en fonction du pas hélicoïdal réduit  $\hat{L}$ . Ligne continue : prédiction par le modèle filamentaire à  $Re = \infty$  et  $\hat{a} = 0.06$ . Ligne discontinue : modèle bidimensionnel. Symboles : amplitudes obtenues par simulations numériques directes à  $Re = 5000$  pour une taille de cœur initiale  $\hat{a}_0 = 0.06$ .

Elle révèle en fonction du pas hélicoïdal d'autres régimes dynamiques jusqu'à la stabilisation du système quand le pas atteint une valeur critique. Ces résultats sont étayés par des comparaisons avec des simulations numériques directes.

## Références

- [1] S.M.E. Widnall, The stability of a helical vortex filament, *J. Fluid Mech.*, 54 (1972) 641–663.
- [2] B.P. Gupta, R.G. Loewy, Theoretical analysis of the aerodynamic stability of multiple, interdigitated helical vortices, *AIAA J.*, 12(10) (1974) 1381–1387.
- [3] V.L. Okulov and J.N. Sørensen, Stability of helical tip vortices in a rotor far wake, *J. Fluid Mech.*, 576 (2007) 1–25.
- [4] P.G. Saffman, *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press (1993).
- [5] H.U. Quaranta, H. Bolnot, Th. Leweke, Long-wave instability of a helical vortex, *J. Fluid Mech.*, 780, (2015) 687–716.
- [6] C. Selçuk, I. Delbende, M. Rossi, Helical vortices : linear stability analysis and nonlinear dynamics, *Fluid Dyn. Res.*, 50(1) (2018) 011411.
- [7] M.A. Stremler, On relative equilibria and integrable dynamics of point vortices in periodic domains, *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 24 (2010) 25–37.
- [8] I. Delbende, B. Piton, M. Rossi, Merging of two helical vortices, *Eur. J. Mech. B-Fluid*, 49 (2015) 363–372.